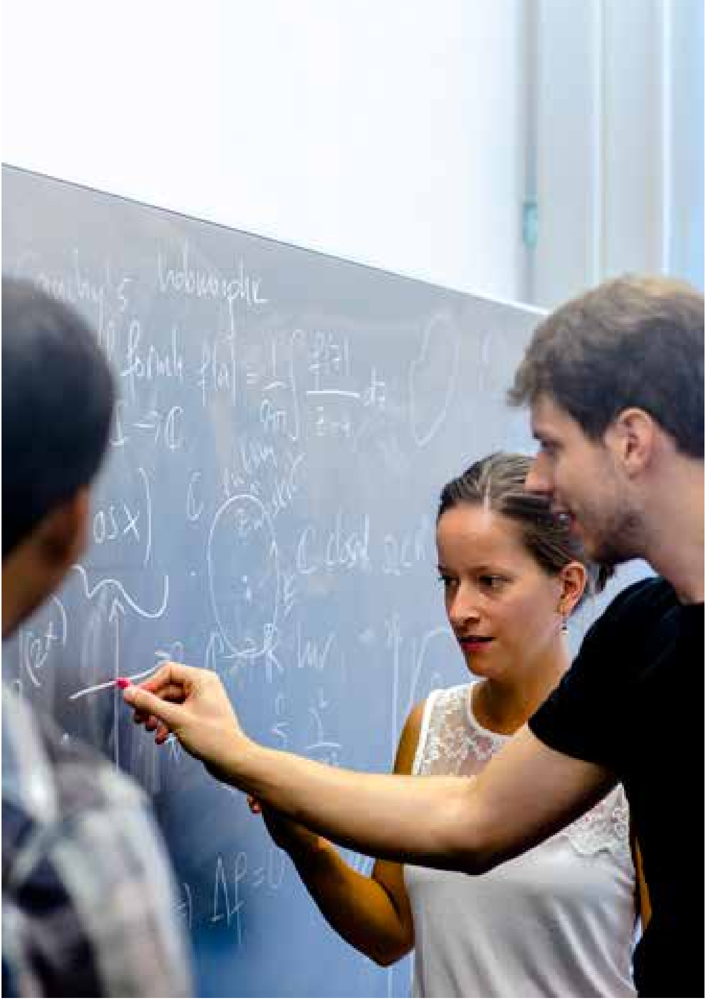
Universität
Basel

Departement
Mathematik und Informatik

Mathematische Forschung in Basel



Mathematik? Mathematik!

Die Mathematik ist eine uralte Wissenschaft und kann auf eine mehrtausendjährige, ungebrochene Geschichte zurückblicken. Mathematische Erkenntnisse, die in der Antike errungen wurden, haben heute und bis in alle Ewigkeit ihre Gültigkeit. Gleichzeitig ist die Mathematik eine hochaktuelle Wissenschaft: wichtige Probleme bleiben ungelöst, und in zahlreichen technischen und wissenschaftlichen Anwendungen ist mathematisches Know-how unverzichtbar.

Basel und seine Universität spielen in der neueren Mathematikgeschichte eine bedeutende Rolle: die Mathematikerdynastie der Bernoulli hat hier ihren Ursprung, und mit Leonhard Euler kann die Universität Basel einen weltberühmten Absolventen vorweisen. Im 20. Jahrhundert wirkte hier der berühmte Mathematiker Alexander Ostrowski, dessen breites Werk einen grossen Teil der Mathematik abdeckt. Der seit Kurzem emeritierte David Masser war an der Formulierung der grundlegenden abc-Vermutung beteiligt. Diese ist eines der wichtigsten Probleme der Zahlentheorie; ein Beweis könnte neues Licht auf Fermats letzten Satz werfen.

Die vorliegende Broschüre möchte Ihnen einen Einblick in die aktuelle mathematische Forschung an der Universität Basel vermitteln: Sieben Forschungsgruppen befassen sich mit der Weiterentwicklung der theoretischen Grundlagen der Mathematik, aber auch mit anwendungsorientierten Projekten.

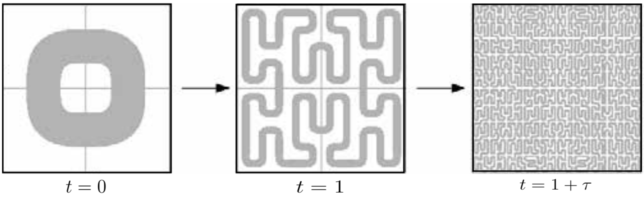
Wir wünschen Ihnen viel Vergnügen bei der Lektüre!

Prof. Dr. Jérémy Blanc
Leiter Fachbereich Mathematik

GRUPPE CRIPPA
ANALYSIS

Die Forschungsgruppe von Professor Gianluca Crippa befasst sich mit dem mathematischen Studium von physikalischen Prozessen, wie z.B. den chaotisch und zufällig wirkenden Strömungsmustern von Flüssigkeiten. Ein Ziel ist das vertiefte Verständnis von Vermischungsvorgängen: Wie schnell und wie effizient lassen sich zwei Flüssigkeiten wie Wasser und Öl miteinander vermischen? Welche Rolle spielen dabei Strömungen?

Solche Vorgänge werden in den Naturwissenschaften durch Experimente und Simulationen untersucht; diese stossen aber angesichts der Komplexität vieler Situationen an ihre Grenzen. Hier kann die Mathematik mit Methoden der Analysis weiterhelfen: Partielle Differentialgleichungen ermöglichen es, die verschiedenen Faktoren, die einen Vermischungsvorgang beeinflussen, wie z.B. Fliessgeschwindigkeiten, Fliessrichtungen, Temperatur etc., sowie ihre Wechselwirkungen mathematisch zu beschreiben.



Komplex und ästhetisch: mathematische Beschreibung eines Mischvorgangs.

Die Forschungsgruppe Crippa befasst sich mit der Analyse von Partiellen Differentialgleichungen: je besser diese (äusserst komplexen) Gleichungen verstanden und gelöst werden können, desto besser kann das beschriebene Naturphänomen verstanden werden. Die Mathematik kann dabei nicht nur Vorgänge beschreiben, sondern ganz zentral einen Beitrag zur Erklärung der beobachteten Phänomene liefern.

GRUPPE LENZMANN
ANALYSIS

Wie alt ist unser Universum? Wird unsere Sonne irgendwann zu einem schwarzen Loch? Erstaunlicherweise können wir solche fundamentalen Fragen mit dem Studium geeigneter Differentialgleichungen sehr präzise beantworten. Die Analysis entwickelt geeignete allgemeine Lösungsmethoden für diese Differentialgleichungen und versucht, Aussagen über die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen sowie über deren qualitative Eigenschaften herzuleiten: ist die Masse unserer Sonne gross genug, um sich irgendwann in ein schwarzes Loch zu verwandeln? Unter welchen Umständen bleibt ein weisser Zwerg stabil?

$$E(M) = \begin{cases} \text{finite} & \text{if } M \leqslant 1.4 \times M_{\text{Sun}} \quad \text{(Stabilität)} \\ -\infty & \text{if } M > 1.4 \times M_{\text{Sun}} \quad \text{(Kollaps!)} \end{cases}$$

Formel zur Berechnung der Grenzmasse eines Weissen Zwerges

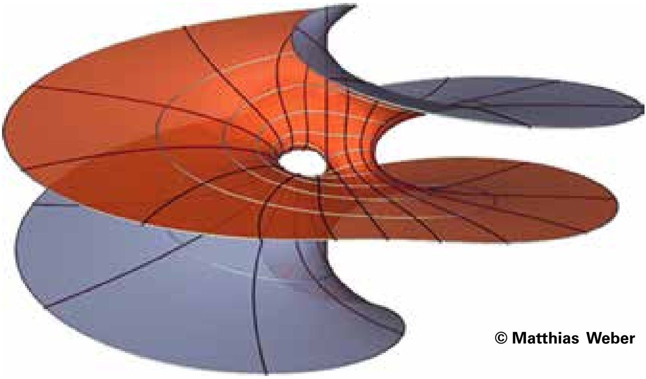
Die Forschungsgruppe von Professor Enno Lenzmann beschäftigt sich insbesondere mit grundlegenden Fragen zu partiellen Differentialgleichungen, welche aus Astrophysik, Quantenmechanik oder Relativitätstheorie motiviert sind. Dabei geht es um Phänomene wie Magnetismus, die Stabilität der Materie, Laserstrahlen oder den Transport von Lichtsignalen in Glasfasern. Eine zentrale Rolle spielen dabei sogenannte nichtlokale Phänomene: Störungen oder kleine Änderungen an einem Ort wirken sich auf das gesamte System aus.

Stabil oder nicht?
Ein weisser Zwerg, umgeben von einem sogenannten planetarischen Nebel

GRUPPE MARTINAZZI
ANALYSIS

In der Analysis werden die Eigenschaften von Funktionen untersucht. Eine Funktion bildet das Verhältnis zweier Grössen zueinander ab und zeigt, wie sich die zweite Grösse anpasst, wenn die erste sich verändert. Während z.B. ein Wassertropfen in die Tiefe fällt, verändert sich seine Position, und die Geschwindigkeit erhöht sich. Position und Geschwindigkeit sind somit Funktionen der Zeit. Physikalische Gesetze, die meist wesentlich komplexere Funktionen aufweisen, können mittels Differentialgleichungen beschrieben und mit Methoden der Analysis untersucht werden.

Analysis wird aber auch in der Geometrie verwendet, zur Beschreibung der Form von Objekten; z.B. kann die Krümmung einer zweidimensionalen Oberfläche mittels Differentialgleichungen genau beschrieben werden. Die Forschungsgruppe von Professor Luca Martinazzi verwendet Methoden der Analysis, um u.A. die Formen von «allgemeinen» Flächen von beliebigen Dimensionen (sog. Riemannsche Mannigfaltigkeiten) zu studieren.

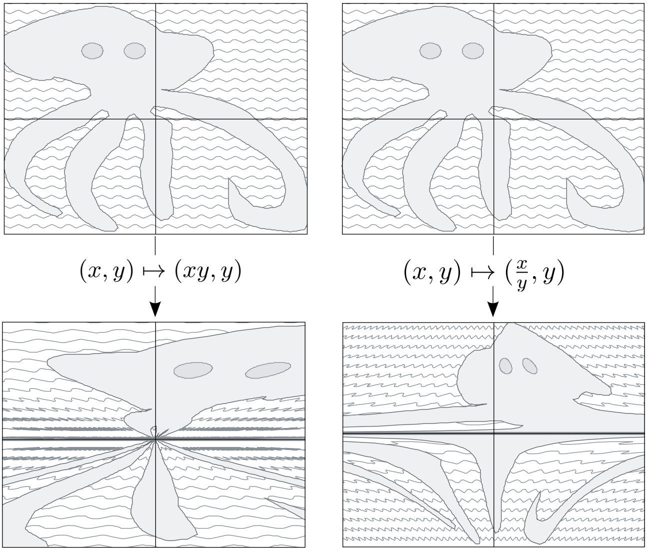


Eine gekrümmte Fläche

Eine typische Frage ist das «Vorgeschriebene Krümmungsproblem»: gegeben eine beliebige Funktion, kann man eine allgemeine Fläche finden, die als Krümmung genau diese Funktion hat? Durch die Kombination von Ideen aus der Geometrie und der Analysis kann die Gruppe Martinazzi in solchen Fragen Fortschritte erzielen.

GRUPPE BLANC
ALGEBRAISCHE GEOMETRIE

Die Algebraische Geometrie untersucht geometrische Formen und Strukturen mit Techniken der Algebra, wie z.B. Polynomen. Ein Polynom ist eine (endliche) Summe von Vielfachen von Potenzen mit natürlichen Zahlen als Exponenten und mehreren Variablen. Polynomische Gleichungen können viele Lösungen haben, und Familien von Lösungen können als geometrische Figuren dargestellt und somit besser verstanden werden. Mithilfe dieser Methode können verschiedene Probleme der klassischen Mathematik bearbeitet werden.



Der eingeschnürte Octopus: eine Gerade wird zum Punkt oder umgekehrt.

Die Forschungsgruppe Algebraische Geometrie von Professor Jérémy Blanc studiert Transformationen von algebraischen Strukturen wie Drehungen, Translationen oder Symmetrien; darunter insbesondere solche, die invertierbar sind, wie Kreisinversion, Möbius-Transformationen oder Aufblasungen. Diese werden seit dem Altertum studiert.

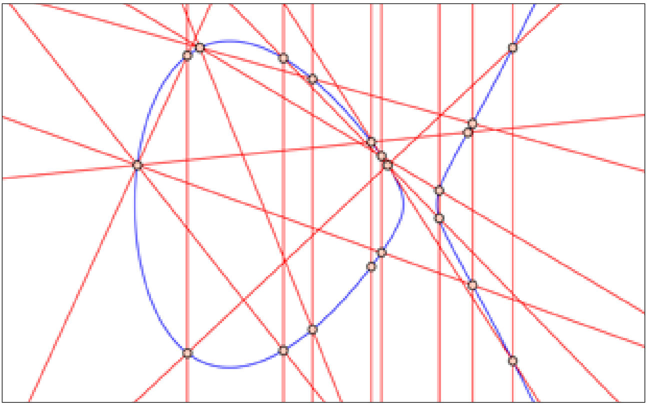
Dieses Thema ist für verschiedene Gebiete der Mathematik bedeutsam, z.B. Gruppentheorie, dynamische Systeme, komplexe Analysis oder hyperbolische Geometrie. Ausserhalb der Mathematik können algebraische Transformationen überall dort angewendet werden, wo Strukturen studiert werden, wie z.B. Physik, Chemie oder Robotik.

GRUPPE HABEGGER
ZAHLENTHEORIE

Die Zahlentheorie fasziniert Mathematiker und Mathematikerinnen seit der Antike. Sie beschäftigt sich mit ganzen Zahlen und Brüchen, also den Bausteinen der Mathematik, die wir bereits als Kind kennenlernen und die uns im Alltag oft begegnen. Aber diese harmlos wirkenden Konzepte führen schnell zu schwierigen Problemen. Wie viele Primzahlen 2, 3, 5, 7,... gibt es, und wie sind sie verteilt? Kann die Summe zweier Kubikzahlen, wie z.B. 1, 8, 27 usw., wieder eine Kubikzahl sein? Bereits Euler wusste, dass dies unmöglich ist – aber warum?

Die Forschungsgruppe Zahlentheorie von Professor Philipp Habegger beschäftigt sich mit Verbindungen zur Geometrie. Eine interessante Frage ist, wie viele Punkte mit ganzzahligen oder rationalen Koordinaten auf einer ebenen Kurve liegen. Das oben erwähnte Kubikzahlenproblem lässt sich in diese Sprache übersetzen und mit geometrischen Werkzeugen untersuchen.

Besonders elliptische Kurven sind im Fokus der Forschung. Mittels der unten abgebildeten Sehnen- und Tangentenkonstruktion lassen sich zwei Punkte zu einem dritten Punkt «addieren». Diese «Addition auf der Kurve» verbindet Geometrie und Arithmetik und ist ein mächtiges Werkzeug, um die elliptische Kurve zu studieren. Sie spielt in Anwendungen der Kryptographie eine wichtige Rolle.

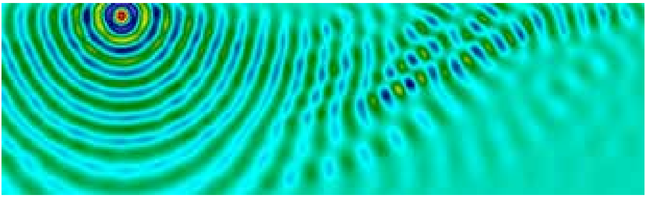


Eine elliptische Kurve namens 38600m1 mit Gleichung $y^2 = x^3 - 175x + 850.$

GRUPPE GROTE
NUMERISCHE ANALYSIS

Von den kleinsten Wellen des sichtbaren Lichts im Nanometerbereich bis zu den kilometerlangen seismischen Wellen gewaltiger Erdbeben durchlaufen Wellen verschiedenster Art ständig alle Bereiche unseres täglichen Lebens. Kaum können wir uns einen Alltag ohne Musik, Radio, Handy, Fernbedienung und dergleichen vorstellen!

Breitet sich eine Welle ungehindert durch ein homogenes Medium aus, so behält sie ihre Form und kann dadurch Information übermitteln. Trifft eine Welle auf ein Hindernis oder eine Unebenheit, so entsteht eine neue reflektierte Welle, die zurück zu ihrem Ursprung läuft. Dieses Echo erlaubt der Fledermaus, in vollständiger Dunkelheit Insekten im Zickzackkurs zu jagen, wie auch dem Arzt in der medizinischen Anwendung, den unsichtbaren Fötus mit Ultraschall sichtbar zu machen.

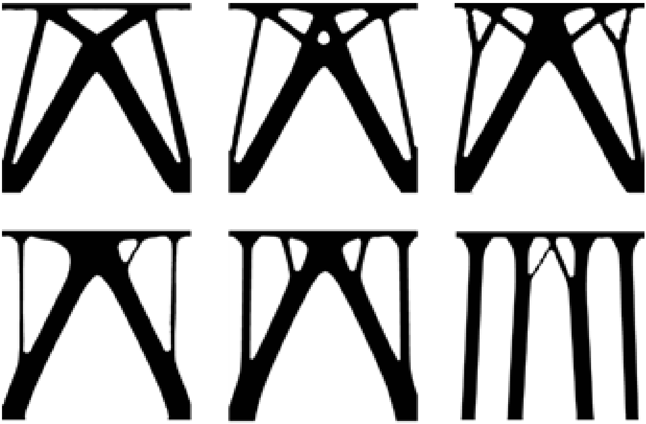


Seismische Tomographie: Durch wiederholtes Abgleichen von simulierten seismischen Daten (oben) mit echten Messwerten an der Erdoberfläche kann die geologische Struktur im Erdinnern ermittelt werden (unten).

Die Forschungsgruppe Numerische Analysis von Professor Marcus Grote beschäftigt sich mit modernen Methoden der Numerischen Mathematik, die sowohl eine möglichst effiziente und detailtreue Simulation von Wellenphänomenen auf Hochleistungsrechnern erlauben als auch die Lösung des inversen Problems, bei dem anhand von Messdaten an einer Oberfläche das unsichtbare Innere sichtbar gemacht werden kann.

GRUPPE HARBRECHT
COMPUTATIONAL MATHEMATICS

In den Natur- und Ingenieurswissenschaften besteht der Wunsch, teure Experimente wie beispielsweise Crashtests in der Fahrzeugindustrie oder Festigkeitstests für Betonkonstruktionen durch beliebig oft und schnell wiederholbare Modellrechnungen zu ersetzen. Die zugrundeliegenden mathematische Modelle sind allerdings oftmals derart komplex, dass sie sich nicht mehr von Hand lösen lassen. Daher müssen Computer zur Berechnung solcher Modelle verwendet werden.



Wie müssen Pfeiler geformt sein, damit eine Brücke bei möglichst geringem Betonverbrauch maximal stabil ist?

Die Forschungsgruppe Computational Mathematics von Professor Helmut Harbrecht befasst sich mit der Konstruktion und Analyse leistungsfähiger Algorithmen zur Berechnung mathematischer Modelle sowie ihrer Implementierung am Computer. Dadurch sollen Verfahren entwickelt werden, die sich für praktische Anwendungen in Forschung und Wirtschaft eignen.

Die Forschungsschwerpunkte der Gruppe sind die rechnergestützte Lösung von partiellen Differentialgleichungen, die den meisten Modellen der Natur- und Ingenieurswissenschaften zugrundeliegen, sowie die Formoptimierung und die Quantifizierung von Unsicherheiten.

Educating
Talents
since 1460.

Universität Basel
Departement Mathematik und Informatik
Fachbereich Mathematik
Spiegelgasse 1
4051 Basel
Switzerland

dmi.unibas.ch/de/studium/mathematik